# Kalman filter

## Kalman滤波器（KF）

### 简介

Kalman滤波器是一种线性二元估计（Linear Quadratic Estimation，LQE），是一种最优线性状态估计方法（在最小均方误差准则下的最佳线性滤波器）。它也是一种回归（recursive）的估计器，在估计下一时刻状态时只需要用到上一时刻的状态和当前的观测值。因此它也可以用于实时（real time）系统中。

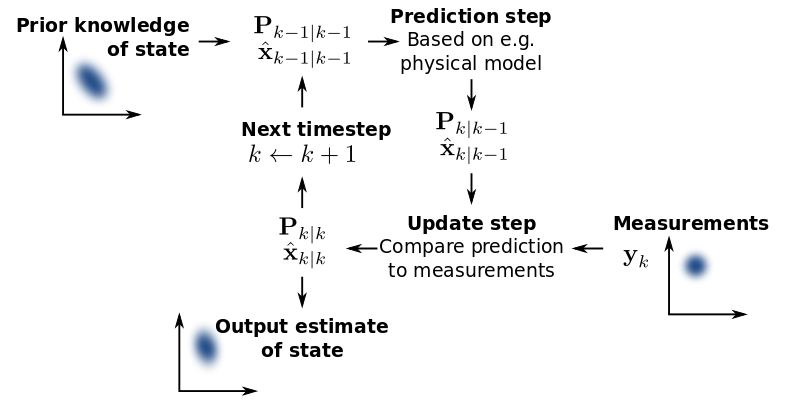


图1.1 [Basic concept of Kalman filtering](https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter)

### 动态系统模型

#### 实际的系统模型

如下图所示，第一行为时间项；第二行为通过观测得到的值，即；第三行为用户要根据经验及测试得到的系统参数，如状态转移模型、观测模型、状态过程噪声的协方差、观测过程噪声的协方差、控制输入模型；第四行为系统状态，如系统当前状态及其方差。

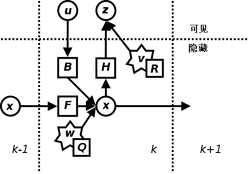


图1.2 kalman filter的隐马尔可夫链式模型

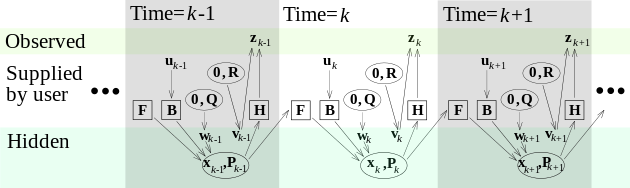


图1.3 [Kalman filter model](https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter)



图1.4 实际的系统模型

**预测阶段（assume）：**



其中，为当前状态，、分别作用在上一时刻的状态和控制输入，为模型预测噪声且。

**观测阶段（observation/measurement）：**



其中，为观测值，将状态空间映射到测量空间，为观测噪声且。

#### 带kalman的计算模型



图1.5 带反馈的Kalman系统模型

**预测（Predict）：**

先验（priori）状态估计



先验（priori）协方差估计



**更新（Update）：**

适配前（pre-fit）残差



加入测量误差后的适配前（pre-fit）协方差



最优Kalman增益（测量值的比例系数）



更新后验（posteriori）状态估计



更新后验（posteriori）协方差



适配后（post-fit）残差



#### 系统参数设置

##### 待设定的系统参数

如图1.2所示，待设定的系统参数如下：

* 系统状态变化参数：、、；
* 方差参数或方差计算方法：、；
* 已知的外部作用：。

在目标追踪等场景下物体没有已知的外部作用，与为。所以待设定的系统参数简化为：、及、。而、由系统决定，需要通过测试调整的参数或计算方法为、。

##### P，Q，R的关系

设，的更新过程可简化提取为。通过试验可知，如果与选为固定值，通过多次迭代是收敛的。由此也验证了算法的收敛性。增益系数可简写为。在收敛后，。

由此特例可以看出，当与选为常数时，式可重写为。其中为固定常数，即预测量与测量值用和为1的固定权值相加。

### 室内定位系统中应用

#### 基于速度的滤波模型

位置的测量精确度取决于的精度，其测量期望为，测量噪声方差为；由于速度，所以的测量精确度取决于和的精度，其测量期望为，测量噪声方差为。

同理对于加速度，测量则于、、有关，其测量期望为，测量噪声方差为。

可以看出，如果只测量位置，则的测量误差通常较大（级别），所以系统模型的预测项中不加入加速度。

#### 参数设置

* **时延和平滑**

通过实验可知，当一定时，参数会影响跟踪（非稳态）延迟（phase shift）和跟踪平滑度。增大，跟踪时延增大，跟踪平滑度上升；反之减小跟踪时延减小（由于更加相信测量，计算出的点离测量值更近），但跟踪平滑度下降。实验中可以看出时延和平滑度两者是矛盾的，需要调整来平衡这时延和平滑。同理，由~可以看出，减小与增大有着类似的效果。

#### 实现过程

将系统参数，代入~，并化简后得：





其中，，，。











~与~一一对应。观察以上方程，有如下规律：

* 、为坐标向量，但由于这里表示单一的测量和预测量，所以用标量形式表示。
* 当时将一直减小，所以不能为0，否则表示系统预测没有误差，会造成测量失效。
* 当与初值相同且时，与将始终相同，此时为对称阵。
* 表示距离测量误差与速度误差间相互关联的量。
* ，其中为加速度的方差。由此可以得到各项比例关系为。

**参考文献：**:

1. 《Target Tracking for UWB Multistatic Radar Sensor Networks》
2. 《Mobile Location with NLOS Identification and Mitigation Based on Modified Kalman Filtering》

## 扩展Kalman滤波器（Extended Kalman filter, EKF）

### 原理

状态转移（state transition）和观测（observation）模型不一定要是线性模型，即及由矩阵相乘的线性方程转变为如下的非线性方程。





EKF只是在KF的基础之上改变了状态转移函数和测量函数，对非线性函数的Taylor展开式进行一阶线性化截断，忽略其余高阶项，从而将非线性问题转化为线性。线性化后系统矩阵与分别如下。





用近似的与求得的为近似最优卡尔曼增益而不是最优卡尔曼增益。这是因为计算和的时候理论上应该计算函数和的雅可比矩阵。但是实际操作起来非常困难，特别是对于一些复杂的非线性系统。因此往往采用Taylor展开取一阶线性的部分。这就直接导致了EKF在高度非线性系统下性能锐减。而且系统初始状态估计错误或者说建模不正确，EKF也会迅速发散。

**无损卡尔曼滤波器**（Unscented Kalman Filter, UKF）则避免了求取函数的雅可比矩阵，从而提高了滤波器的性能和鲁棒性。但由于推到实现较复杂，在室内定位的单片机程序中暂不考虑使用。

### 室内定位

在室内定位系统中，如假设tag是匀速运动，则属于线性模型，只需要使用普通Kalman Filter。不需要使用EKF。

## 自适应Kalman滤波（基于信息的AKF）

### 定义

自适应卡尔曼滤波Adaptive Kalman Filter在利用测量数据进行滤波的同时，不断地由滤波本身去判断系统的动态是否有变化，对模型参数和噪声统计特性进行估计和修正，以改进滤波设计、缩小滤波的实际误差。

### 原理

设，那么其方差为。

然后由计算得与。然后再用传统KF计算及更新系统变量。

**参考文献：**

1. 《自适应卡尔曼滤波的最新进展》

## 在有色噪声中使用Kalman

## Kalman在测距中的应用

在测距中的kalman可以与Wylie方法相结合。预测值为Wylie的插值结果，测量值为测量得到的数据。根据这两者用KF得到滤波结果。

## Kalman在目标追踪中的应用

* 假设系统模型为匀速运动，即；测量结果为用测量距离计算得到的点。两者通过KF，计算算到滤波后tag的坐标。
* 在系统模型中考虑到加速度，则。**下一步实现中可以加入加速度变量，由于加速度为0均值，可以过低通滤波，以保证速度变化的平滑。**